Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra – FCUL – DEGGE

Exame 16/01/2024 – 1ª parte(1(3val),2(4val),3(3val)), 2ª parte(4(3val), 5(3val), 6(4val))

1- Considere 2 vetores $\vec{a}(t), \vec{b}(t) \in \mathbb{R}^3$, dados como funções diferenciáveis de um parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

a) Mostre, recorrendo à forma indicial e ao tensor alternante que $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$

b) Explicite essa derivada vetorial no caso em que $\vec{a}(t) = f(t)\vec{u}$, $\vec{b}(t) = g(t)\vec{v}$, onde $\vec{u}, \vec{v}$ são vetores constantes determinando em que condições aquela derivada é nula.

2- Considere a trajetória parabólica no plano xy descrita por: $C = \{\vec{r}(t) = t\vec{e}_x + at^2\vec{e}_y, -1 \le t \le 1\}$ onde $a > 0$.

a) Desenhe a curva. b) Calcule a curvatura $\kappa(t) = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\| / \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|^3$ e o raio de curvatura $R_c(t) = 1/\kappa(t)$ calculando onde esse raio é máximo e onde é mínimo. c) Calcule o vetor posição $\vec{R}_c(t) = \vec{r}(t) + \vec{n}(t)/\kappa(t)$ do centro de curvatura, onde $\vec{n}(t)$ é o versor normal à curva. Sugestão: No presente caso $\vec{n}(t) = \vec{e}_z \times vers\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$, e $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ constituem um triedro direto.

3- Considere o campo bidimensional $T(x, y, z) = x + 3y + 2x^2y$. a) Calcule o gradiente. b) Calcule a derivada dirigida ao longo do vetor $\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$. c) Calcule o laplaciano. d) Calcule o valor médio de $T(x, y)$ no interior do quadrado $Q = \{(x, y): 0 \le x, y \le a\}$ em função de a.

4- Considere o campo 3D de temperatura $T(x, y, z) = (ax + by)(1 + e^{-kz})$ num gás, onde $a, b, k > 0$ são constantes e o campo uniforme da velocidade horizontal $\vec{v}_H = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$ onde u, v são constantes. O campo vetorial 2D da densidade de fluxo de entalpia é dado pelo produto $\vec{F}(x, y) = c_p\vec{v}_H\, T(x, y, z)$ onde c_p é o calor específico do gás. a) Calcule a divergência de $\vec{F}$, b) Calcule o rotacional de $\vec{F}$. c) Considere a superfície vertical P, alinhada ao longo do eixo dos y ou seja $P = \{(x, y, z): x = 0,\ 0 \le y \le L, 0 \le z \le H\}$ e calcule, em função dos parâmetros, o fluxo de $\vec{F}$ através de P no sentido de x crescente. Comece por determinar o versor normal a P.

5- Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = yx\vec{e}_y - yx\vec{e}_x$. a) Calcule o rotacional. b) Calcule, pela via direta, a circulação de $\vec{F}$ ao longo do percurso correspondente à sequência de lados do quadrado no plano xy, z=0 : (0,0) → (1,0) → (1,1) → (0,1) → (0,0). Faça o esquema do circuito. c) Calcule essa circulação recorrendo ao teorema de Stokes e verifique a coincidência com o resultado de b).

6- a) Forneça na forma cartesiana e na forma polar, as 3 raízes complexas da equação $(z + i)^3 = 8$. b) Exprima as partes real e imaginária da função $f(z) = \cos(z) = u(x, y) + iv(x, y), z = x + iy$, em função de $x, y \in \mathbb{R}$. c) Mostre que $f(z)$ satisfaz as condições de Cauchy-Riemann da diferenciabilidade: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. d) Mostre que a derivada complexa é $\frac{d\cos(z)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin(z)$. e) Com base em b), calcule o integral $\int_0^i \sin(z)dz$ e dê o significado desse integral em termos de integrais de caminho no plano complexo. Nota: $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$; $\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$, $\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$.

Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra - Exame 16/1/24

Correção

(1) Sejam $\vec{a}(t), \vec{f}(t) \in \mathbb{R}^3$ dois vetores em $\mathbb{R}^3$, funções diferenciáveis de $t \in \mathbb{R}$.

a) $(\vec{a} \times \vec{f})_i$ = componente i de $\vec{a} \times \vec{f} = \varepsilon_{ijk} a_j f_k$ na qual se assumiu a convenção de Einstein dos índices repetidos e ε_{ijk} é o tensor alternante. Derivando em t:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{f})_i = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_{ijk} a_j f_k\right) = \varepsilon_{ijk}\left(a_j \frac{df_k}{dt} + \frac{da_j}{dt} f_k\right)$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{ijk} a_j \frac{df_k}{dt}}_{\left(\vec{a} \times \frac{d\vec{f}}{dt}\right)_i} + \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{da_j}{dt} f_k}_{\left(\frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{f}\right)_i}, \quad \forall_i \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{f}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{f} + \vec{a} \times \frac{d\vec{f}}{dt}$$

b) Se $\begin{cases} \vec{a}(t) = f(t)\vec{u} \\ \vec{f}(t) = g(t)\vec{v} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\vec{a}}{dt} = f'\vec{u}, \quad \frac{d\vec{f}}{dt} = g'\vec{v}$, logo

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{f}) = f'\vec{u} \times g\vec{v} + f\vec{u} \times g'\vec{v} = (f'g + fg')(\vec{u} \times \vec{v}) =$$

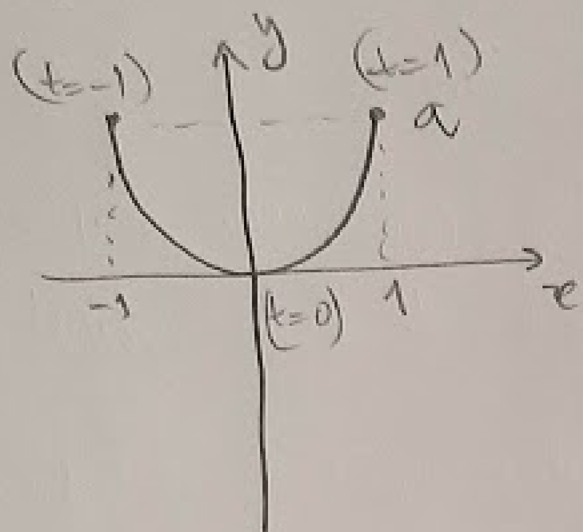
$= \frac{d}{dt}(fg)\, \vec{u} \times \vec{v}$. Esta derivada é nula se

$\left(\frac{d}{dt} fg = 0 \text{ ou seja } fg = \text{cte}\right)$ ou $\left(\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \text{ ou seja } \vec{u}, \vec{v} \text{ colineares}\right)$

(2)

$$C = \{ \vec{r}(t) = t\,\vec{e}_x + a t^2\,\vec{e}_y \; ; \; -1 \le t \le 1 \} \quad ; \quad a > 0$$

a)



$\odot\, \vec{e}_z$ (versor para cá) $= \vec{e}_x \times \vec{e}_y$

b) A curvatura $\kappa(t)$ depende do ponto da curva sendo

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\| \Big/ \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|^3 .$$

Calculemos os vários fatores:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_x + 2at\,\vec{e}_y \; ; \; \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2a\,\vec{e}_y$$

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = v = (1 + 4a^2t^2)^{1/2} \; ; \; v^2 = 1 + 4a^2t^2$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \underbrace{(\vec{e}_x \times 2a\,\vec{e}_y)}_{2a\,\vec{e}_z} + \underbrace{2at\,\vec{e}_y \times 2a\,\vec{e}_y}_{=\vec{0}}$$

Assim $\kappa(t) = \dfrac{2a}{v^3} = \dfrac{2a}{(1+4a^2t^2)^{3/2}}$ sendo uma função monótona decrescente de t^2,

$$\arg\max_{t \in [-1,1]} \kappa(t) = 0 \; ; \; \max \kappa(t) = \kappa(0) = 2a$$

$$\arg\min_{t \in [-1,1]} \kappa(t) = \pm 1, \; \min \kappa(t) = \kappa(\pm 1) = \frac{2a}{(1+4a^2)^{3/2}}$$

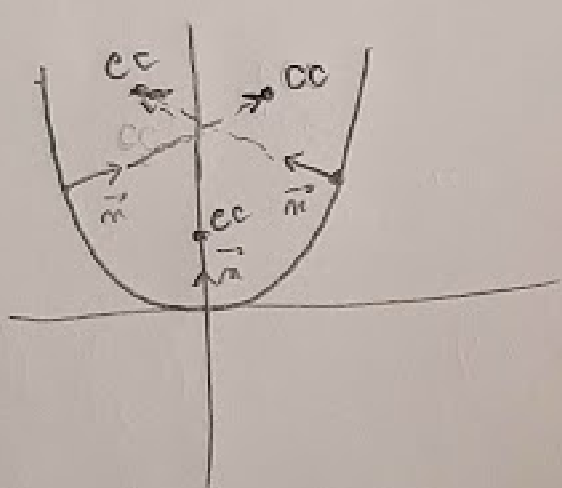
Portanto a curvatura $k(t)$ é máxima no ponto mínimo da parábola $(t=0)$ e o raio de curvatura é

$$R_c(t) = \frac{1}{k(t)} = \frac{v^3}{2a}$$

c) O vetor posição do centro de curvatura (cc) é:

$$r_c(t) = \vec{r}(t) + \vec{n}\, R_c(t) = \vec{r}(t) + \frac{\vec{n}}{k(t)}$$

onde $\vec{n}$ é o versor normal à curva apontando para o interior da curvatura.



$$\vec{n} = \vec{e}_z \times \text{vers}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{1}{v}\left(\vec{e}_z \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{1}{v}\left(\vec{e}_z \times (\vec{e}_x + 2at\,\vec{e}_y)\right)$$

$$= \frac{1}{v}\left(\vec{e}_y - 2at\,\vec{e}_x\right)$$

Donde $r_c(t) = \underbrace{\left(t\,\vec{e}_x + at^2\,\vec{e}_y\right)}_{\vec{r}} + \underbrace{\frac{v^3}{2a}}_{R_c(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{v}\left(\vec{e}_y - 2at\,\vec{e}_x\right)}_{\vec{n}}$

$$= (1 - v^2)t\,\vec{e}_x + \left(at^2 + \frac{v^2}{2a}\right)\vec{e}_y$$

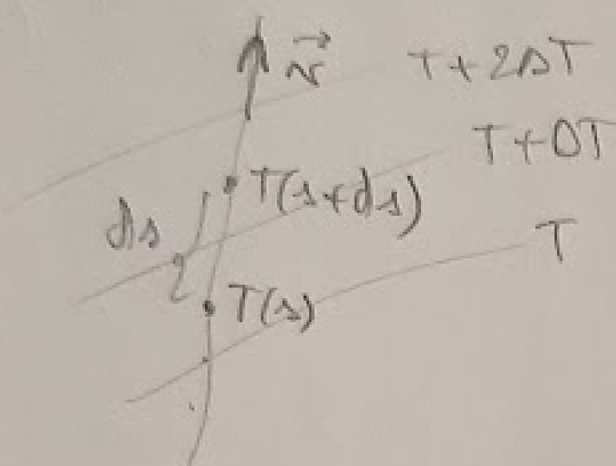
$$= -4a^2t^3\,\vec{e}_x + \left(\frac{6a^2t^2+1}{2a}\right)\vec{e}_y$$ = posição do centro de curvatura

(3) $T(x,y) = x + 3y + 2x^2 y$

a) $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{e}_y = (1+4xy)\vec{e}_x + (3+2x^2)\vec{e}_y$

b) $\frac{dT}{ds} = \text{vers}\,\vec{v} \cdot \nabla T = \frac{\vec{v}}{v} \cdot \nabla T$ = derivada dirigida ao longo do vetor $\vec{v}$.

$ds = \|\vec{v}.\,d\vec{r}\|$



ds = elemento infinitesimal de percurso ao longo de $\vec{v}$

$\vec{v} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y$

$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{5}$

$$\frac{dT}{ds} = \underbrace{(1+4xy,\ 3+2x^2)}_{\nabla T} \cdot \underbrace{(1,-2)}_{\vec{v}}\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\frac{1}{v}} =$$

$$= \frac{1+4xy-6-4x^2}{\sqrt{5}} = \frac{-5+4xy-4x^2}{\sqrt{5}}$$

c) $\text{lap}\,T = \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}_{4y} + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{0} = 4y$

d) valor médio $\bar{T}$ no interior do quadrado

$$Q = \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq a\}$$

$$\bar{T} = \frac{1}{a^2}\int_0^a dx \int_0^a dy \cdot T(x,y) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^a \int_0^a (x + 3y + 2x^2 y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[a \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^a + 3a\, \frac{y^2}{2}\Big|_0^a + 2\, \frac{x^3}{3}\Big|_0^a \frac{y^2}{2}\Big|_0^a \right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{a^3}{2} + \frac{3}{2} a^3 + \cancel{2}\, \frac{a^3}{3} \cdot \frac{a^2}{\cancel{2}} \right) =$$

$$= 2a + \frac{a^3}{3}$$

---

④ $T(x,y,z) = \underbrace{(ax + by)}_{T_h(x,y)} \underbrace{(1 + e^{-kz})}_{f(z)} = T_h(x,y) f(z)$

$\vec{v}_H = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$, $u, v =$ ctes

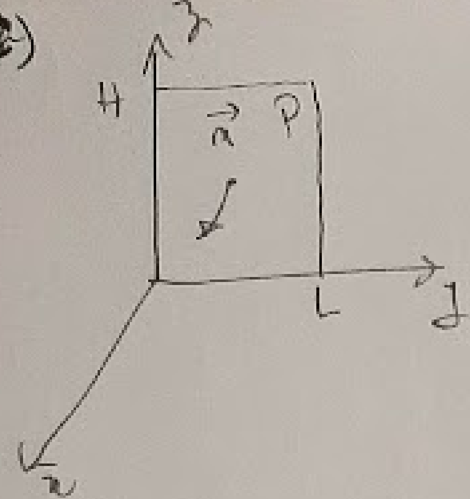
$$\vec{F}(x,y,z) = c_p \vec{v}_H T_h(x,y) f(z) = \underbrace{(c_p T_h(x,y) f(z) u)}_{F_x} \vec{e}_x +$$

$$+ \underbrace{(c_p T_h(x,y) f(z) v)}_{F_y} \vec{e}_y \in \mathbb{R}^2$$ dado que $\vec{F}$ só tem 2 componentes

a) $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = c_p f u \overbrace{\frac{\partial T_h}{\partial x}}^{a} + c_p f v \overbrace{\frac{\partial T_h}{\partial y}}^{b}$

$$= c_p f(z) [ua + vb]$$

c)



$\vec{n}$ = versor normal à superfície P = $\vec{e_x}$ no sentido crescente de x

Fluxo de $\vec{f_h}$ através de P $= \displaystyle\int_0^L \int_0^H \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{n}}_{F_x = c_p u T_h(x,y) f(z)} \, dy\, dz = \Phi$

Sobre P, vem $f_x = c_p u \underbrace{ky}_{T_h(x,y)} (1 + e^{-kz})$
$(x=0)$

logo $\Phi = \displaystyle\int_0^L \int_0^H c_p u k y (1 + e^{-kz}) \, dy\, dz =$

$= c_p u k \left.\dfrac{y^2}{2}\right|_0^L \cdot \left(z\Big|_0^H + \left.\dfrac{e^{-kz}}{-k}\right|_0^H \right) =$

$= c_p u k \dfrac{L^2}{2} \cdot \left(H + \dfrac{1}{k}(1 - e^{-kH}) \right)$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_p T_h(x,y) f(z) u & c_p T_h(x,y) f(z) v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e_x}\left(-c_p T_h(x,y)\, v\, f'(z)\right) + \vec{e_y}\left(c_p T_h(x,y) f' u\right) + \left(c_p f (v a - u b)\right)\vec{e_z}$$

$$= c_p T_h(x,y) \cdot \underbrace{k e^{-kz}}_{-f'} \left(v\vec{e_x} - u\vec{e_y}\right) + c_p f\,(v a - v b)\,\vec{e_z}$$

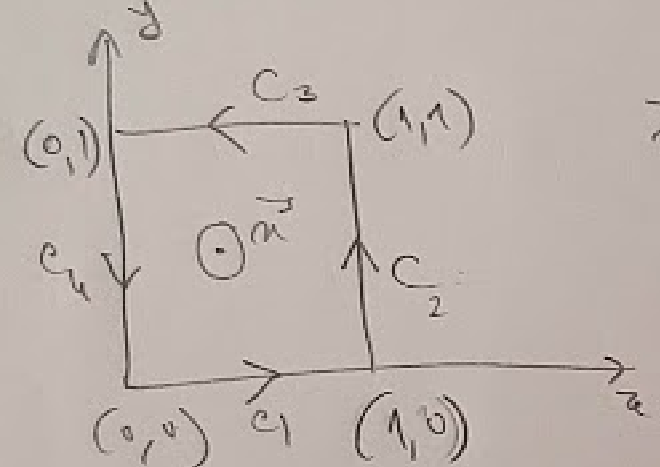
(5) $\vec{F}(x,y) = \underbrace{yx\,\vec{e}_y}_{F_y} - \underbrace{yx\,\vec{e}_x}_{F_x} = F_x(x,y)\,\vec{e}_x + F_y(x,y)\,\vec{e}_y$

a)

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yx & yx & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (y+x)\,\vec{e}_z$$

b)



$\vec{n} = \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

Circulação de $\vec{F}$ ao longo da curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

$$= \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_0^1 \underset{0}{F_x(x,0)}\,dx}_{\text{termo de } C_1 \,=\, 0} + \underbrace{\int_0^1 F_y(1,y)\,dy}_{\text{termo de } C_2} + \underbrace{\int_1^0 F_x(x,1)\cdot -dx}_{\text{termo de } C_3} + \underbrace{\int_1^0 \underset{0}{F_y(0,y)}\cdot -dy}_{\text{termo de } C_4 \,=\, 0}$$

$$= \int_0^1 1\cdot y\,dy + \int_1^0 x\cdot 1\cdot -dx = \int_0^1 y\,dy + \int_0^1 x\,dx$$

$$= \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

c) Usando o Teorema Stockes

circulação ao longo do circuito fechado C =

$= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ = fluxo do rotacional através da superfície apoiada em C $= \int_0^1 \int_0^1 \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{e}_z \, dx\, dy$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (x+y)\, dx\, dy = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left.\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

De facto a circulação calculada pela via direta coincide com a dada pelo teorema de Stockes, sendo o fluxo do rotacional mais fácil de calcular neste caso.

---

6 a) $(z+i)^3 = 8 = 2^3 \underbrace{e^{2\pi i m}}_{1}$

logo $z + i = 2 e^{\frac{2\pi i m}{3}}$, $m = 0, 1, 2$

$z = 2 e^{\overbrace{\frac{2\pi m}{3}}^{\alpha} i} - i =$ $\qquad \alpha = \frac{2\pi m}{3}$

$= 2(\cos\alpha + i \,\text{sen}\,\alpha) - i = \underbrace{(2\cos\alpha)}_{\text{Re}\, z} + i \underbrace{(2\,\text{sen}\,\alpha - 1)}_{\text{Im}\, z}$

= forma cartesiana de z, i.e. com parte real e imaginária de z.

Na forma polar vem:

$$z = \rho e^{i\theta} \quad ; \quad \rho^2 = \mathrm{Re}\,z^2 + \mathrm{Im}\,z^2 =$$

$$= \underbrace{4\cos^2\alpha}_{\mathrm{Re}\,z^2} + \underbrace{4\,\mathrm{sen}^2\alpha + 1 - 4\,\mathrm{sen}\,\alpha}_{\mathrm{Im}\,z^2} = 5 - 4\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Re}\,z}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}\,\alpha - 1}{2\cos\alpha}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{\sec\alpha}{2}\right)$$

nota $\sec\alpha$ = secante de α = $\frac{1}{\cos\alpha}$

---

f) $\cos z = u(x,y) + i\,v(x,y)$ onde $z = x+iy$

com $x, y, u, v \in \mathbb{R}$

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} =$$

$$= \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2} = \frac{(\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x)e^{-y} + (\cos x - i\,\mathrm{sen}\,x)e^{y}}{2}$$

$$= \cos x \underbrace{\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)}_{\cosh y} - i\,\mathrm{sen}\,x \underbrace{\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)}_{\sinh y} = \underbrace{\cos x \cosh y}_{u(x,y)} \underbrace{- i\,\mathrm{sen}\,x \sinh y}_{i\,v(x,y)}$$

c) Condições de Riemann-Cauchy da diferenciabilidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\text{sen}\, x \cosh y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos x\, \text{senh}\, y = -\frac{\partial v}{\partial x} = \cos x\, \text{senh}\, y$$

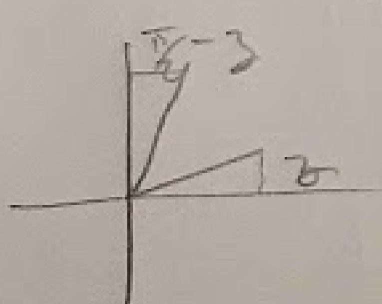
d) Derivada complexa

$$\frac{d \cos z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \cosh y - i \cos x\, \text{senh}\, y$$

$$= -(\sin x \cosh y + \cos x\, \text{senh}\, y) = -\sin z$$

Para obter $\sin z$ recorre-se à igualdade trigonométrica

$$\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos\left(\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}_{x'} \underbrace{- iy}_{iy'}\right) = \cos(x' + iy')$$



$$= \text{sen}\, x \cosh y - i . \cos x . -\text{senh}\, y$$

$$= \text{sen}\, x \cosh y + i \cos x\, \text{senh}\, y$$

e) $$\int_0^i \sin z \, dz = \int_0^i -\frac{d \cos z}{dz} dz = \int_i^0 \frac{d\cos z}{dz} dz =$$

$$= \cos z \Big|_i^0 = \underbrace{\cos \phi}_{1} - \underbrace{\cos i}_{} = 1 - \cosh 1 = 1 - \left(\frac{e^1 + e^{-1}}{2}\right) \simeq -0{,}54$$

$$\underbrace{\cos\phi \cosh 1}_{\cosh 1} - i \underbrace{\sin \phi\, \text{senh}\, 1}_{\phi} = \cosh 1 = \frac{e^1 + e^{-1}}{2} \simeq 1{,}54$$